.
1

Semi-continuité inférieure d'une fonctionnelle intégrale

A. Bourass, B. Ferrahi & O. Kahlaoui

Résumé. Dans ce papier on étend en dimension infinie des résultats de Ekeland-Temam, Ioffé et Olech concernant l'étude de la semi-continuité inférieure d'une fonctionnelle intégrale I_f associée a un intégrande normal f. Nous donnons aussi une propriété de type "Lower closure theorem" pour les épigraphes et nous établissons l'équivalence entre une condition de croissance de Olech et la propriété d'équi-intégrabilité donnée par Ioffé.

Abstract. In this paper we will extend in infinite dimension some results of Ekeland-Temam, Ioffé and Olech concerning the study of lower semicontinuity of an integral functional I_f associated to a normal integrand f. We give also a lower closure theorem for epigraphs and we establish the equivalence between a groth condition of Olech and the lower compactness proprety given by Ioffé.

Introduction.

La semi-continuité inférieure (s.c.i) des fonctionnelles intégrales sur des espaces intégraux a été largement étudiée par plusieurs auteurs durant les décennies 70 et 80, E.J.Balder [2],[3] A.Bourass, A.Fougères [9], C.Castaing, P.Clausure [10], L.Césari [12],[13] I.Ekeland, R.Temam [16], A.D.Ioffé [17], C.Olech [20],[21],[22] et d'autres. Tous ces auteurs ont travaillé en dimension finie: les fonctions considérées sont à valeurs dans un espace de dimension finie $E = \mathbb{R}^n$.
Dans ce travail, on s'intéresse à la s.c.i fort-faible d'une fonctionnelle intégrale sur un couple d'espaces $L \times M$, où L et M sont des espaces de fonctions à valeurs dans des espaces de Banach de dimension infinie. Nous reprenons des résultats de [16] et de [17] et nous suivons de près leur démarche. Certains arguments clé invoqués par ces auteurs

*****Mots clés.** Intégrande normal, fonctionnelle intégrale, semi-continuité inférieure, la propriété (Q) de Césari, équi-intégrabilité. **Keywords.** Normal integrand, integral functional, lower semicontinuity, lower closure theorem, equi-integrability.

(Compacité dans $\mathbb{R}^n$ et le théorème de Carathéodory sur les convexes de $\mathbb{R}^n$) se sont avérés inopérants en dimension infinie. Nous avons été amenés à mettre en œuvre quelques techniques nouvelles, d'une part en introduisant la notion "d'équi-coercivité forte locale" qui nous a permis d'obtenir, dans le cas des épigraphes, une propriété de type "Lower closure theorem" [2], [12], [13], [22], et d'autre part en dégageant une méthode de "scalarisation" qui permet d'appliquer le théorème de Carathéodory en dimension infinie. Dans la dernière partie nous montrons que les conditions de croissance données par Olech [22] sont équivalentes à la propriété de compacité donnée par Ioffé dans [17].

1 Propriété de type "Lower closure theorem" pour les épigraphes.

Dans cette séction on commence par établir des résultats de type "Lower closure theorem" (ou propriété (Q) de Césari [12]) adaptés aux épigraphes. Ces résultats seront utiles dans le deuxième paragraphe. On introduit les définitions et les notations suivantes:

- On dit avec [12] qu'une multiapplication Γ d'un métrique (X,d) dans les parties de $Y \times \mathbb{R}$, où Y est un espace localement convexe semi-normé, possède la propriété (Q) en $x_0 \in X$ si:

$$\Gamma(x_0) = \bigcap_{\delta>0} \overline{co}\left\{\bigcup \Gamma(x), x \in X, d(x,x_0) < \delta\right\}$$

- Dans toute la suite X et Y désignent des espaces de Banach séparables, la norme de X est notée $\|.\|$, $B_X(x,r)$ (resp $\bar{B}_X(x,r)$) la boule ouverte (resp fermée) de centre x et de rayon r, $B_X = B_X(0,1)$ et $\bar{B}_X = \bar{B}_X(0,1)$ et $\mathcal{B}(X)$ la tribue Borelienne de X.

- On dit qu'une fonction $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ est fortement équi-coercive en x_0 s'il existe $r > 0$ tel que:

$$\lim_{\|y\|\to+\infty} \frac{1}{\|y\|}\left[\inf_{\|x-x_0\|<r} f(x,y)\right] = +\infty$$

- On dit qu'une fonction $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ est $(\|.\|,\sigma)$-s.c.i si elle est semi-continue inférieurement sur $X \times Y$ lorsque X est muni de sa norme et Y de la topologie faible $\sigma(Y,Y')$. Elle est dite propre si elle ne prend jamais la valeur $-\infty$ et si elle n'est pas identiquement égale à $+\infty$.

- Pour tout entier N, on note $S(N)$ l'ensemble des suites finies de nombre réels $(a_i)_{1\le i\le N}$ telles que $a_i \ge 0$ pour tout $1 \le i \le N$ et $\sum_{i=1}^{N} a_i = 1$.

Proposition 1.1 *Soit X un espace normé, Y un espace de Banach réflexif et $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction propre. On suppose que:*

i) La fonction f est $(\|.\|, \sigma)$-s.c.i.

ii) La fonction f est fortement équi-coercive en x_0.

Alors:

$$\overline{co}(epif(x_0, .)) = \bigcap_{\varepsilon>0} \overline{co}\left[\bigcup_{\|x-x_0\|<\varepsilon} epif(x, .)\right]$$

Preuve. Pour simplifier les notations, on pose:

$$A_p(x_0) = \bigcup_{\|x-x_0\|<\frac{1}{p}} epif(x, .)$$

et, il suffit de montrer que:

$$A(x_0) = \bigcap_{p\in \mathbb{N}^*} \overline{co}A_p(x_0) \subset \overline{co}(epif(x_0, .))$$

L'autre sens étant trivial en prenant $x = x_0$. Soit $(y_0, \lambda_0) \in A(x_0)$. Pour tout p dans $\mathbb{N}^*$, il existe une suite $(y_{n,p}, \lambda_{n,p})_n$ d'éléments de $coA_p(x_0)$ qui converge vers (y_0, λ_0). D'après un lemme de diagonalisation de Attouch [1], il existe une application $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ croissante, telle que:

$$(y_0, \lambda_0) = \lim_{n\to\infty}(y_{n,p(n)}, \lambda_{n,p(n)}) \tag{1}$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a:
$\exists N_n \in \mathbb{N}^*$, $\exists(\alpha_n^i)_{1\leq i\leq N_n} \in S(N_n)$, $\exists y_n^i \in Y$, $\exists\lambda_n^i \in \mathbb{R}$, $i = 1, ..., N_n$ tel que:

$$y_{n,p(n)} = \sum_{i=1}^{N_n} \alpha_n^i y_n^i \qquad \lambda_{n,p(n)} = \sum_{i=1}^{N_n} \alpha_n^i \lambda_n^i \tag{2}$$

avec:

$$(y_n^i, \lambda_n^i) \in A_{p(n)}(x_0) \qquad \forall\, 1 \leq i \leq N_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Par la suite on distinguera deux cas:

<u>1^{er} cas:</u> $f \geq 0$. Supposons que $(y_0, \lambda_0) \notin \overline{co}(epif(x_0, .))$, le théorème de Hahn-Banach assure l'existence d'un hyperplan fermé non vertical (car $f \geq 0$) qui sépare (y_0, λ_0) et $\overline{co}(epif(x_0, .))$. Autrement dit, il existe une forme affine y' sur Y telle que:

$$\lambda_0 < y'(y_0) \qquad \text{et} \qquad y'(y) < f(x_0, y) \qquad \forall y \in Y \tag{3}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considére le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ défini par:

$$B_n = \left\{(y'(y_n^i), \lambda_n^i), \quad i = 1, ..., N_n\right\}$$

Il est claire que $(y'(y_{n,p(n)}), \lambda_{n,p(n)}) \in co(B_n)$ et d'après le théorème de Carathéodory, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, Il existe $(\beta_n^k)_{1\leq k\leq 3} \in S(3)$ et des indices $(i_k)_{k=1,2,3}$ sélectionnés de $\{1, 2, ..., N_n\}$ tels que:

$$y'(y_{n,p(n)}) = \sum_{k=1}^{3} \beta_n^k y'(y_n^{i_k}) \qquad \text{et} \qquad \lambda_{n,p(n)} = \sum_{k=1}^{3} \beta_n^k \lambda_n^{i_k} \tag{4}$$

De plus, comme $(y_n^{i_k}, \lambda_n^{i_k}) \in A_{p(n)}(x_0)$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k = 1, 2, 3$, il existe $x_n^k \in X$ tel que:

$$\|x_n^k - x_0\| \leq \frac{1}{p(n)} \qquad \text{et} \qquad f(x_n^k, y_n^{i_k}) \leq \lambda_n^{i_k} \tag{5}$$

D'autre part, si la forme affine y' s'ecrit $y' = y_1' + \alpha$ où $y_1' \in Y'$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose: $\|y'\| = \|y_1'\| + |\alpha|$ et l'hypothèse de forte coercivité implique l'existence d'une constante $M > 1$ telle que:

$$\|y\| > M \qquad \text{implique} \qquad f(x, y) \geq \|y'\|\|y\| \geq y'(y). \tag{6}$$

Soit n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ et tout $k = 1, 2, 3$ on a $\|x_n^k - x_0\| \leq r$. Pour k fixé dans l'ensemble $\{1, 2, 3\}$ deux éventualités se présentent:

a. il existe $n_k \geq n_0$ tel que $\forall n \geq n_k$ on a $\|y_n^{i_k}\| \geq M$. Dans ce cas (5) et (6) impliquent $y'(y_n^{i_k}) \leq \lambda_n^{i_k}$ pour tout $n \geq n_k$.

b. $\forall j > n_0$, $\exists n_j > j$ tel que $\|y_{n_j}^{i_k}\| < M$, quitte à extraire une sous suite, on peut supposer que $(y_n^{i_k})_n$ converge faiblement vers un certain $y^k \in Y$. et d'après (3) $y'(y^k) < f(x_0, y^k)$ et l'hypothèse ii) implique:

$$\lim_{n\to\infty} y'(y_n^{i_k}) = y'(y^k) < f(x_0, y^k) \leq \liminf_{n\to\infty} f(x_n^k, y_n^{i_k}) \leq \liminf_{n\to\infty} \lambda_n^{i_k}.$$

Donc $y'(y_n^{i_k}) \leq \lambda_n^{i_k}$ à partir d'un certain rang N_k.

Ainsi, dans les deux cas, il existe un entier positif N tel que pour tout $n \geq N$ et tout $k = 1, 2, 3$ on a $y'(y_n^{i_k}) \leq \lambda_n^{i_k}$ d'où:

$$\sum_{k=1}^{3} \beta_n^k y'(y_n^{i_k}) \leq \sum_{k=1}^{3} \beta_n^k \lambda_n^{i_k} \qquad \forall n \geq N$$

et par passage à la limite, $n \to +\infty$, on obtient avec (4):

$$\begin{aligned} y'(y_0) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{3} \beta_n^k y'(y_n^{i_k}) \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{3} \beta_n^k \lambda_n^{i_k} \\ &= \lambda_0 \end{aligned}$$

Ceci contredit la première inégalité de (3) et achève de montrer que $(y_0, \lambda_0) \in \overline{co}(epif(x_0, .))$.

$2^{\text{ème}}$ cas: $f$quelconque. Ce cas se déduit du lemme suivant qui est vérifié sous les mêmes hypothèses que la proposition 1.1.

Lemme 1.2 *Soit y' une forme linéaire sur $Y\times$ $I\!R$ et $(y_0,\lambda_0)\in \bigcap_{\varepsilon>0}\overline{co}\left[\bigcup_{\|x-x_0\|<\varepsilon} epif(x,.)\right]$. Alors, il existe une fonction minorée $f_{y'}: X\times Y\to \overline{I\!R}$ (dépendant de y', y_0 et x_0) telle que:*

$$f\le f_{y'} \qquad \textit{et} \qquad y'(y_0,\lambda_0)\le \sup\{y'(y,\lambda),\quad (y,\lambda)\in \overline{co}(epif_{y'}(x_0,.))\}$$

En effet, comme $\overline{co}(epif_{y'}(x_0,.))\subset \overline{co}(epif(x_0,.)$, alors:

$$\begin{aligned} y'(y_0,\lambda_0) &\le \sup\{y'(y,\lambda),\quad (y,\lambda)\in \overline{co}(epif_{y'}(x_0,.))\}\\ &\le \sup\{y'(y,\lambda),\quad (y,\lambda)\in \overline{co}(epif(x_0,.))\}\end{aligned}$$

La dernière inégalité étant vraie pour tout $y'\in Y'\times$ IR, d'après le théorme de Hahn-Banach on a:

$$(y_0,\lambda_0)\in \overline{co}(epif(x_0,.)).$$

Preuve de lemme 1.2. On pose $y'=(y'_1,\lambda)\in(Y\times \text{ IR})'$ et on considére l'ensemble:

$$B_n(y'_1)=\left\{(y'_1(y_n^i),\lambda_n^i),\quad i=1,..,N_n\right\}$$

Utilisant les mêmes techniques que celles du premier cas, on montre que pour tout entier non nul n, il existe $(\beta_n^k)_{1\le k\le 3}\in S(3)$, des indices $(i_k)_{k=1,2,3}$ sélectionés dans l'ensemble $\{1,2,...,N_n\}$ et des éléments $y_n^{i_k}\in Y$, $\lambda_n^{i_k}\in$ IR, $x_n^k\in X$ tels que:

$$\begin{aligned} y'_1(y_{n,p(n)}) &= \sum_{k=1}^{3}\beta_n^k y'_1(y_n^{i_k})\\ \lambda_{n,p(n)} &= \sum_{k=1}^{3}\beta_n^k\lambda_n^{i_k}\end{aligned}$$

$$\|x_n^k-x_0\|\le\frac{1}{p(n)}\qquad \text{et}\qquad f(x_n^k,y_n^{i_k})\le\lambda_n^{i_k}$$

Pour k fixé et pour les mêmes raisons que dans le premier cas, on a l'une ou l'autre des éventualités suivantes:

a. $\lim_{n\to\infty}\|y_n^{i_k}\|=+\infty$ et dans ce cas, il existe une constante $M>0$ et un entier n_k tels que:

$$\lambda_n^{i_k}\ge f(x_n^k,y_n^{i_k})\ge\|y_n^{i_k}\|\ge M \qquad \forall n\ge n_k \tag{7}$$

b. Il existe une suite extraite, encore notée $(y_n^{i_k})_n$, qui converge faiblement vers un certain $y^k \in Y$ et alors:

$$f(x_0, y^k) \leq \liminf_{n\to\infty} f(x_n^k, y_n^{i_k}) \leq \liminf_{n\to\infty} \lambda_n^{i_k} \tag{8}$$

Soit J l'ensemble des indices défini par:

$$J = \Big\{ k \in \{1,2,3\} \text{ tel que } (y_n^{i_k})_n \text{ converge } \Big\}$$

Pour $\varepsilon > 0$, on pose $c = \inf \Big\{ M, \quad f(x_0, y^k) - \varepsilon, \quad k \in J \Big\}$, d'après (7) et (8) il existe un entier N tel que pour tout $n \geq N$ et tout $k = 1,2,3$ on a $c \leq \lambda_n^{i_k}$. Par la suite, on pose $f_{y'} = \max(f, c)$ et on vérifie que:

$$(y_n^{i_k}, \lambda_n^{i_k}) \in \bigcup_{\|x - x_0\| \leq \frac{1}{p(n)}} epi f_{y'}(x, .) \qquad \forall n \geq N, \quad \forall k = 1,2,3$$

D'autre part, quitte à extraire une sous suite, on peut supposer que la suite $(\sum\limits_{k=1}^{3} \beta_n^k y_n^{i_k})_n$ converge faiblement dans Y, en effet pour k fixé dans $\{1,2,3\}$ tel que $\|y_n^{i_k}\|$ tend vers $+\infty$, on a:

$$\begin{aligned} 0 \leq \beta_n^k f(x_n^k, y_n^{i_k}) &\leq \beta_n^k \lambda_n^{i_k} \\ &= \lambda_{n,p(n)} - \sum_{j=1, j\neq k}^{3} \beta_n^j \lambda_n^{i_j} \\ &\leq \lambda_{n,p(n)} - c \sum_{j=1, j\neq k}^{3} \beta_n^j \end{aligned}$$

La suite $(\lambda_{n,p(n)})_n$ étant bornée, il en est de même de $\Big(\beta_n^k f(x_n^k, y_n^{i_k})\Big)_n$.
Et comme:

$$\beta_n^k f(x_n^k, y_n^{i_k}) = \beta_n^k \|y_n^{i_k}\| \frac{f(x_n^k, y_n^{i_k})}{\|y_n^{i_k}\|}$$

On en déduit grâce à l'hypothèse ii) que $\beta_n^k \|y_n^{i_k}\|$ tend vers 0. Finalement, on a:

$$\begin{aligned} y'(y_0, \lambda_0) &= \lim_{n\to\infty} y'(y_{n,p(n)}, \lambda_{n,p(n)}) \\ &= \lim_{n\to\infty} (y_1'(\sum_{k=1}^{3} \beta_n^k y_n^{i_k}), \lambda \sum_{k=1}^{3} \beta_n^k \lambda_n^{i_k}) \\ &= \lim_{n\to\infty} y'(\sum_{k=1}^{3} \beta_n^k (y_n^{i_k}, \lambda_n^{i_k})) \\ &= y'(\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{3} \beta_n^k (y_n^{i_k}, \lambda_n^{i_k})) \end{aligned}$$

L'ensemble $\bigcap\limits_{n\in\ \mathbb{N}^*} \overline{co}\left(\bigcup\limits_{\|x-x_0\|\leq \frac{1}{p(n)}} epif_{y'}(x,.)\right)$ étant convexe fermé dans $Y\times\ \mathbb{R}$, la suite $\left(\sum\limits_{k=1}^{3}\beta_n^k(y_n^{i_k},\lambda_n^{i_k})\right)_n$ converge faiblement vers une limite qui appartiend nécessairement au même ensemble. Par conséquent on a:

$$y'(y_0,\lambda_0)\leq \sup\left\{y'(y,\lambda),\quad (y,\lambda)\in \bigcap_{n\in\ \mathbb{N}^*}\overline{co}\left(\bigcup_{\|x-x_0\|\leq \frac{1}{p(n)}} epif_{y'}(x,.)\right)\right\}$$

Quitte à faire une translation, $f_{y'}$ étant minorée, on peut la supposer positive et en appliquant le résultat du premier cas, on obtient:

$$\bigcap_{n\in\ \mathbb{N}^*}\overline{co}\left(\bigcup_{\|x-x_0\|\leq \frac{1}{p(n)}} epif_{y'}(x,.)\right)=\overline{co}(epif_{y'}(x_0,.))$$

qui donne l'égalité cherchée:

$$y'(y_0,\lambda_0)\leq \sup\left\{y'(y,\lambda),\quad (y,\lambda)\in\overline{co}(epif_{y'}(x_0,.))\right\}.$$

Remarque 1.3 *Sans l'hypothèse d'équi-forte coercivité la conclusion de la proposition1.1 n'est pas toujours vraie comme le montre l'exemple suivant [5]:*
Soit $f:\ \mathbb{R}\times\ \mathbb{R}\to\ \mathbb{R}^+$ la fonction définie par:

$$f(x,y)=\begin{cases} y^2 & si\quad x\leq 0\\ \frac{1}{x} & si\quad 0\leq |y|<\frac{1}{x}\\ xy^2 & si\quad 0<\frac{1}{x}<|y|\end{cases}$$

On vérifie que f est s.c.i, non équi-fortement coercive en $x=0$ et qu'elle ne vérifie pas l'égalité de la proposition1.1.

Cependant, en absence de l'hypothèse d'équi-forte coercivité on a le résultat suivant.

Proposition 1.4 *Soit X un espace normé, Y un espace de Banach réflexif et $f:X\times Y\to\ \overline{\mathbb{R}}$ une fonction propre positive et $(\|.\|,\sigma)-s.c.i.$ On suppose que $f(x,.)$ est convexe pour tout $x\in X$, alors pour toute fonction $h:\ \mathbb{R}^+\to\ \mathbb{R}^+$ fortement coercive et tout $x_0\in X$, on a:*

$$epif(x_0,.)=Pr_{Y\times\ \mathbb{R}}\left(\bigcap_{\varepsilon>0}\overline{co}\left[\left\{(y,\lambda,h(\|y\|)),\ \ (y,\lambda)\in\bigcup_{\|x-x_0\|<\varepsilon} epif(x,.)\right\}\right]\right)$$

Preuve. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on note:

$$E_p(x_0) = \left\{ (y, \lambda, h(\|y\|)), \quad (y, \lambda) \in \bigcup_{\|x - x_0\| < \frac{1}{p}} epif(x, .) \right\}$$

Il suffit de montrer que:

$$E = Pr_{Y\times\ \mathbb{R}} \left(\bigcap_{p\in\ \mathbb{N}^*} \overline{co} E_p(x_0) \right) \subset epif(x_0, .)$$

L'autre sens étant trivial en prenant $x = x_0$. Soit $(y_0, \lambda_0) \in E$ et $\eta_0 \in \mathbb{R}$ tel que $(y_0, \lambda_0, \eta_0) \in \overline{co} E_p(x_0)$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, alors il existe une suite $(y_{n,p}, \lambda_{n,p}, \eta_{n,p})_n$ d'éléments de $co\,(E_p(x_0))$ qui converge fortement vers (y_0, λ_0, η_0) et par un lemme de diagonalisation de Attouch [1], on peut trouver une application croissante $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que:

$$(y_0, \lambda_0, \eta_0) = \lim_{n\to+\infty} (y_{n,p(n)}, \lambda_{n,p(n)}, \eta_{n,p(n)}) \tag{9}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a:
$\exists N_n \in \mathbb{N},\ \exists(\alpha_n^i)_{1\le i\le N_n} \in S(N_n),\ \exists(y_n^i, \lambda_n^i)_{1\le i\le N_n} \in \bigcup_{\|x-x_0\|<\frac{1}{p(n)}} epif(x, .)$ tels que:

$$\begin{aligned} y_{n,p(n)} &= \sum_{i=1}^{N_n} \alpha_n^i y_n^i && (10)\\ \lambda_{n,p(n)} &= \sum_{i=1}^{N_n} \alpha_n^i \lambda_n^i && (11)\\ \eta_{n,p(n)} &= \sum_{i=1}^{N_n} \alpha_n^i \eta_n^i \quad \text{où} \quad \eta_n^i = h(\|y_n^i\|) && (12) \end{aligned}$$

Supposons que $(y_0, \lambda_0) \notin epif(x_0, .)$, d'après le théorème de Hahn-Banach, il existe y' une forme affine sur Y telle que:

$$\lambda_0 < y'(y_0) \qquad \text{et} \qquad y'(y) < f(x_0, y) \qquad \forall y \in Y \tag{13}$$

Introduisons la famille d'ensembles suivante:

$$B_n(y') = \left\{ (y'(y_n^i), \lambda_n^i, \eta_n^i), \quad i = 1, ..., N_n \right\} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

d'après (10), (11) et (12) il est claire que:

$$\left(y'(y_{n,p(n)}), \lambda_{n,p(n)}, \eta_{n,p(n)} \right) \in coB_n(y')$$

et le théorème de Carathèdory implique:
$\exists(\beta_n^k)_{1\le k\le 4} \in S(4),\quad \exists(\mu_n^k)_{1\le k\le 4} \in \mathbb{R}^+,\quad \exists(v_n^k)_{1\le k\le 4} \in Y,\quad \exists(x_n^k)_{1\le k\le 4} \in X$ tels que:

$$y'(y_{n,p(n)}) = \sum_{k=1}^{4} \beta_n^k v_n^k \tag{14}$$

$$\lambda_{n,p(n)} = \sum_{k=1}^{4} \beta_n^k \mu_n^k \tag{15}$$

$$\eta_{n,p(n)} = \sum_{k=1}^{4} \beta_n^k h(\|v_n^k\|) \tag{16}$$

$$\|x_n^k - x_0\| \leq \frac{1}{p(n)} \quad \text{et} \quad f(x_n^k, v_n^k) \leq \mu_n^k \qquad k = 1, ..., 4 \tag{17}$$

D'autre part, la suite $(\|v_n^k\|)_n$ ne peut pas tendre vers $+\infty$ pour tout les indinces $k \in \{1, 2, 3, 4\}$. Sinon la forte coercivité de h et (16) impliqueraient que $\eta_{n,p(n)}$ tend vers $+\infty$ ce qui contredit (9). Alors pour tout entier n et quitte à permuter les indices k, on peut supposer qu'il existe $j_n \in \{1, 2, 3, 4\}$ tel que:

$$\begin{cases} v_n^k \overset{\sigma(Y,Y')}{\longrightarrow} v^k & k = 1, ..., j_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \|v_n^k\| = +\infty & k = j_n + 1, ..., 4 \end{cases} \tag{18}$$

Il découle de (16) que:

$$0 \leq \eta'_n = \sum_{k=j_n+1}^{4} \beta_n^k h(\|v_n^k\|) \leq \eta_{n,p(n)} \tag{19}$$

Comme:

$$\eta'_n = \sum_{k=j_n+1}^{4} \beta_n^k \|v_n^k\| \frac{h(\|v_n^k\|)}{\|v_n^k\|} \tag{20}$$

Les relations (19), (20) et l'hypothèse de forte coercivité de h impliquent:

$$\lim_{n\to+\infty} \beta_n^k \|v_n^k\| = 0 \qquad k = j_n + 1, ..., 4 \tag{21}$$

On en déduit avec (18) que β_n^k tend vers 0 pour $k = j_n + 1, ..., 4$. De plus on peut supposer qu'il existe des réels β^k $1 \leq k \leq j_n$ tels que:

$$\lim_n \beta_n^k = \beta^k \quad \forall k = 1, .., j_n \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{j_n} \beta^k = 1 \tag{22}$$

Finalement, puisque f est positive et $(\|.\|, \sigma)$-s.c.i, les relations (9), (13), (15), (16), (17), (18) et (22) impliquent:

$$\begin{aligned} y'(y_o) &= \lim_{n\to+\infty} y'(\sum_{k=1}^{4} \beta_n^k v_n^k) = y'(\sum_{k=1}^{j_n} \beta^k v^k) \\ &= \sum_{k=1}^{j_n} \beta^k y'(v^k) \\ &\leq \sum_{k=1}^{j_n} \beta^k f(x_0, v^k) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \sum_{k=1}^{j_n} \beta^k \liminf_{n\to+\infty} f(x_n^k, v_n^k) \\
&\leq \sum_{k=1}^{j_n} \beta^k \liminf_{n\to+\infty} \mu_n^k \\
&\leq \liminf_{n\to+\infty} \lambda_{n,p(n)} = \lambda_0
\end{aligned}
$$

Ce qui contredit la première inégalité de (13) et par conséquent $(y_0, \lambda_0) \in epif(x_0, .)$.

Remarques 1.5 *1)Dans le cas où f n'est pas convexe on a les inclusions suivantes:*

$$co(epif(x_0, .)) \subset E \subset \overline{co}(epif(x_0, .))$$

avec:

$$E = Pr_{Y\times\ I\!R}\left(\bigcap_{\varepsilon>0} \overline{co}\left[\left\{(y, \lambda, h(\|y\|)),\quad (y,\lambda) \in \bigcup_{\|x-x_0\|<\varepsilon} epif(x, .)\right\}\right]\right)$$

2)La proposition1.4 (Sous sa forme non convexe) peut être utilisée pour démontrer le cas $f \geq 0$ de la proposition1.1, en effet soit $(y_0, \lambda_0) \in \bigcap_{p\in\ I\!N^*} \overline{co}\left[\bigcup_{\|x-x_0\|\leq\frac{1}{p}} epif(x, .)\right]$ et h la fonction définie par $h(\|y\|) = \inf_{\|x-x_0\|<r} f(x, y)$. En reprenant les étapes de la démonstration de la proposition1.1, au niveau des équations (1) et (2), on a:

$$(y_0, \lambda_0) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{N_n} \alpha_n^i (y_n^i, \lambda_n^i) \quad avec \quad (y_n^i, \lambda_n^i) \in \bigcup_{\|x-x_0\|\leq\frac{1}{p}} epif(x, .) \quad \forall p \in\ I\!N^*$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} p(n) = +\infty$, il existe $N \in\ I\!N^*$ tel que $\frac{1}{p(n)} < r$ pour tout $n \geq N$, et dans ce cas (5) implique:

$$
\begin{aligned}
0 \leq \sum_{i=1}^{N_n} \alpha_n^i h(\|y_n^i\|) &= \sum_{i=1}^{N_n} \alpha_n^i \inf_{\|x-x_0\|<r} f(x, y_n^i) \\
&\leq \sum_{i=1}^{N_n} \alpha_n^i f(x_n^i, y_n^i) \\
&\leq \sum_{i=1}^{N_n} \alpha_n^i \lambda_n^i
\end{aligned}
$$

La suite $\left(\sum_{i=1}^{N_n} \alpha_n^i \lambda_n^i\right)_n$ étant convergeante, il existe $M_1 > 0$ tel que:

$$\sum_{i=1}^{N_n} \alpha_n^i h(\|y_n^i\|) \leq M_1$$

On en déduit qu'il existe $\eta_0 \in I\!R$ *tel que:*

$$\eta_0 = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{N_n} \alpha_n^i h(\|y_n^i\|)$$

Donc:

$$(y_0, \lambda_0, \eta_0) \in \bigcap_{\varepsilon > 0} \overline{co} \left[(y, \lambda, h(\|y\|)), \quad (y, \lambda) \in \bigcup_{\|x - x_0\| < \varepsilon} epif(x, .) \right]$$

et grâce à la proposition1.4 on a:

$$(y_0, \lambda_0) \in \overline{co}(epif(x_0, .)).$$

3)Dans le même ordre d'idée, lorsque la fonction f *de la proposition 1.1 n'est pas nécessairement fortement équi-coercive, on a:*

$$\overline{co} \left[epif(x_0, .) \cap B_{Y \times I\!R}(0, r) \right] = \bigcap_{\varepsilon > 0} \overline{co} \left[\bigcup_{\|x - x_0\| < \varepsilon} epif(x, .) \cap B_{Y \times I\!R}(0, r) \right]$$

En effet, on pose:

$$A_p = \bigcup_{\|x - x_0\| < \frac{1}{p}} epif(x, .) \cap B_{Y \times I\!R}(0, r)$$

Le corollaire (I.3.8) de O.Kahlaoui [18] appliqué à la famille $(A_p)_p$ *qui est décroissante implique* $\bigcap_{p \in I\!N} \overline{co} A_p = \overline{co} \left(\bigcap_{p \in I\!N} \bar{A}_p^\sigma \right)$, *où* $\bar{A}_p^\sigma$ *désigne l'adhérence de* A_p *pour la topologie faible* $\sigma(Y, Y')$. *Il suffit de montre que:*

$$A = \bigcap_{p \in I\!N} A_p \subset \overline{co} \left[epif(x_0, .) \cap B_{Y \times I\!R}(0, r) \right]$$

L'autre sens étant évident en prenant $x = x_0$. *Soit* $(y_0, \lambda_0) \in \bigcap_{p \in I\!N} \bar{A}_n^\sigma$ *et* l *une forme linéaire continue sur* $(Y \times I\!R)$, *les mêmes techniques utilisées précédement nous permettent de construire des suites* $(y_{n,p(n)}, \lambda_{n,p(n)})_n$ *d'éléments de* $Y \times I\!R$ *et* $(x_n)_n$ *dans* X, *telles que:*

$$l(y_0, \lambda_0) = \lim_{n \to +\infty} l(y_{n,p(n)}, \lambda_{n,p(n)}) \qquad \|x_n - x_0\| \leq \frac{1}{p(n)}$$

et,

$$f(x_n, y_{n,p(n)}) \leq \lambda_{n,p(n)} \qquad \|y_{n,p(n)}\| + |\lambda_{n,p(n)}| \leq r$$

La suite $(y_{n,p(n)})_n \left(resp.(\lambda_{n,p(n)})_n \right)$ *est bornée, on peut supposer qu'elle converge faiblement (resp. dans* $I\!R$*) vers un élément* $z_0 \in Y$ *(resp.*$\mu_0 \in I\!R$*). On a alors:*

$$f(x_0, z_0) \leq \lim f(x_n, y_{n,p(n)}) \leq \lim \lambda_{n,p(n)} = \mu_0$$

Où encore:

$$(z_0, \mu_0) \in epif(x_0, .) \cap B_{Y\times\ I\!R}(0, r)$$

On a donc:

$$l(y_0, \lambda_0) = l(z_0, \mu_0) \leq \sup\left\{l(z, \mu), \quad (z, \mu) \in \overline{co}(epif(x_0, .) \cap B_{Y\times\ I\!R}(0, r))\right\}.$$

Et le résultat s'obtient par application du théorème de Hahn-Banach.

2 Semi-continuité inférieure des fonctionnelles intégrales.

Dans ce paragraphe on généralise en dimension infinie des résultats donnés par Ekeland-Temam [16], Ioffé [17] et Olech [22] concernant la s.c.i d'une fonctionnelle intégrale.

2.1 Cadre de travail et notations.

- X un espace de Banach et on note $\mathcal{B}(X)$ la tribue Borelienne de X. $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, μ est une mesure finie, complète et sans atomes. On note $L^0_X(\Omega, \mu)$ l'espace des (classes de) fonctions mesurables, $L^1_X(\Omega, \mu)$ l'espace des (classes de) fonctions Bochner intégrables, $L^\infty_X(\Omega, \mu)$ l'espace des (classes de) fonctions bornées.

- $f : \Omega \times X \times Y \to \overline{I\!R}$ un integrande (i.e: $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(Y), \mathcal{B}(\overline{I\!R})$-mesurable) non partout identique à $+\infty$. Bien entendu la fonction $\omega \to f(\omega, u(\omega), v(\omega))$ reste mesurable pour tout $u \in L^0_X(\Omega, \mu)$ et tout $v \in L^0_Y(\Omega, \mu)$.

- $L \subset L^1_X(\Omega, \mu)$ et $M \subset L^1_Y(\Omega, \mu)$ deux espaces topologiques décomposables i.e: $(\forall E \in \mathcal{A}, \forall z_1, z_2 \in L$ (resp.M), on a: $(z_1.\chi_E + z_2.\chi_{E^c}) \in L$ (resp.M)), où χ_E désigne la fonction qui vaut 1 si $\omega \in E$ et 0 sinon et E^c désigne le complémentaire de E dans Ω.

- les topologies de L et M vérifient les hypothèses fondamentales suivantes:

  (H_1) Si $(z_k(.))_k$ est une suite d'éléments de L (resp.M) qui converge vers 0 et si $(E_k)_k$ est une suite d'ensembles mesurables telle que $(\mu(E_k))_k$ converge vers 0, alors: $(z_k.\chi_{E_k})$ converge aussi vers 0.

  (H_2) La topologie de L est plus fine que la topologie de la convergence en mesure. La topologie de M est plus fine que la topologie induite sur M par la topologie faible de $L^1_Y(\Omega, \mu)$.

- A l'intégrande $f : \Omega \times X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ on associe la fonctionnelle intégrale définie par $I_f : L^1_X(\Omega, \mu) \times L^1_Y(\Omega, \mu) \to \overline{\mathbb{R}}$ telle que:

$$I_f(u, v) = \begin{cases} \int_\Omega f(\omega, u(\omega), v(\omega))d\mu & \text{si} \quad f(., u(.), v(.)) \in L^1{}_{\mathbb{R}}(\Omega, \mu) \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Le premier résultat principal de ce travail est énoncé dans le sous-paragraphe suivant.

2.2 Extension du théorème de Ekeland-Temam.

Dans cette partie, nous donnons une extension du théorème2.1, chap.*VIII* de Ekeland-Temam [16] pour des inégrandes définies sur des espace de dimension infinie et à valeurs non nécessairement positives. Les techniques de [16] sont inopérantes dans ce cas. Nous avons dégagé des hypothèses suffisantes, vérifiées trivialement dans le cas traité par [16], qui nous permettent d'atteindre avec une méthode inspirée de [16] la classe d'intégrandes que nous considérons.

Définition 2.1 *On dit que l'integrande f vérifie la propriété d'équi-intégrabilité $(P.E.I)$ sur $L \times M$ si la suite $\{f^-(., u_k(.), v_k(.)), k \in \mathbb{N}\}$ est équi-intégrable dans $L^1{}_{\mathbb{R}}(\Omega, \mu)$ $\left(i.e \lim_{\mu(E)\to 0} \sup_{k \in \mathbb{N}} \int_E f^-(\omega, u_k(\omega), v_k(\omega))d\mu = 0\right)$, où la suite $(u_k)_k$ (resp. $(v_k)_k$) converge dans L (resp. M), $I_f(u_k, v_k) \leq a < +\infty$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $f^- = \min(f, 0)$.*

Théorème 2.2 *Soient X, Y deux espaces de Banach séparables, Y réflexif, $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ et f comme dans le sous paragraphe 2.1. On suppose en plus que pour presque tout ω dans Ω, f vérifie les propriétés suivantes:*

i) $f(\omega, ., .)$ est propre et $(\|.\|, \sigma)$-s.c.i sur $X \times Y$.

ii) $f(\omega, x, .)$ est convexe pour tout $x \in X$.

iii) $f(\omega, ., .)$ est fortement équi-coercive en tout $x \in X$.

iv) f vérifie la propriété $(P.E.I)$ sur $L^1_X(\Omega, \mu) \times L^1_Y(\Omega, \mu)$ lorsque le premier est muni de la topologie de la conergence en mesure et le second de la topologie faible.

Alors:

$$I_f(\bar{u}, \bar{v}) \leq \liminf_{n\to+\infty} I_f(u_n, v_n)$$

Où,

- *u_n converge en mesure vers $\bar{u}$ dans $L^1_X(\Omega, \mu)$*

- *v_n converge faiblement vers $\bar{v}$ dans $L^1_Y(\Omega, \mu)$*

La preuve utilise un lemme de Fatou généralisé [23] et la remarque suivante.

Remarque 2.3 *Soit* $f_k : \Omega \to \overline{I\!R}$ *et* $\alpha_k \geq 0$ *pour* $k = n, ..., N$ *avec* $n, N \in I\!N$. *Alors:*

$$|\left(\sum_{k=n}^{N} \alpha_k f_k\right)^{-}| \leq \sum_{k=n}^{N} \alpha_k |f_k^{-}| \tag{23}$$

Lemme 2.4 *(Fatou généralisé, [23]). Soit* $(\alpha_n)_n$ *une suite de fonctions intégrables telle que* $\left\{\alpha_k^{-}(.), \quad k \in I\!N\right\}$ *est équi-intégrable dans* $L^1{}_{I\!R}(\Omega, \mu)$, *alors:*

$$\int_{\Omega}^{*} \liminf_{n\to+\infty} \alpha_n(\omega) d\mu \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_{\Omega} \alpha_n(\omega) d\mu$$

Où $\int\limits_{\Omega}^{*}$ *représente l'intégrale supérieure définie pour une fonction* φ *non nécessairement mesurable par:*

$$\int_{\Omega}^{*} \varphi(\omega) d\mu = \sup\left\{\int_{\Omega} \psi(\omega) d\mu, \quad \psi \textit{ mesurable }, \quad \psi \leq \varphi\right\}$$

Preuve. La preuve s'inspire de celle de Ekeland-Temam([16],p.227-228) moyennant l'utilisation de la proposition1.1. Nous la reproduisons en mettant en évidence le rôle de la proposition1.1, qui a permis l'adaptation de la méthode de [16] à la dimension infinie et à des fonctions non nécessairement positives. Si $\liminf\limits_{n\to+\infty} I_f(u_n, v_n) = +\infty$ il n'y a rien à montrer. Sinon, en extrayant une sous suite, on se ramène au cas où:

$$\liminf_{n\to+\infty} I_f(u_n, v_n) = \lim_{n\to+\infty} I_f(u_n, v_n) = c < +\infty$$

La suite $(v_n)_n$ converge faiblement vers $\bar{v}$ dans $L^1_Y(\Omega, \mu)$, d'après le lemme de Mazur([15], p:416), on peut construire une suite $(w_{n'})_{n'}$ de combinaisons convexes qui converge presque partout vers $\bar{v}$ c'est à dire:

$$w_{n'}(.) = \sum_{k=n'}^{N} \alpha_k v_k(.) \quad \text{où} \quad \alpha_k \geq 0 \quad \forall k = n', ..., N \quad \text{et} \quad \sum_{k=n'}^{N} \alpha_k = 1$$

D'autre part la suite $(u_n)_n$ converge en mesure vers $\bar{u}$, alors on peut supposer que $u_n(\omega)$ converge vers $\bar{u}(\omega)$ presque partout. Soit $\omega \in \Omega$ tel que:

$$w_{n'}(\omega) \xrightarrow{Y} \bar{v}(\omega) \qquad u_n(\omega) \xrightarrow{X} \bar{u}(\omega)$$

Posant:

$$g_{n'}(\omega) = \sum_{k=n'}^{N} \alpha_k f(\omega, u_k(\omega), v_k(\omega))$$

Pour tout $n' \in \mathbb{N}$, on a:

$$(w_{n'}(\omega), g_{n'}(\omega)) \in co\left[\bigcup_{k=n'}^{N} epif(\omega, u_k(\omega), .)\right]$$

Comme $\|u_n(\omega) - \bar{u}(\omega)\| \to 0$, alors pour $\varepsilon > 0$ fixé et à partir d'un certain rang, on a:

$$\begin{aligned} co\left[\bigcup_{k=n'}^{N} epif(\omega, u_k(\omega), .)\right] &\subset co\left[\bigcup_{q\geq n'} epif(\omega, u_q(\omega), .)\right] \\ &\subset co\left[\bigcup_{\|x-\bar{u}(\omega)\|<\varepsilon} epif(\omega, x, .)\right] \end{aligned}$$

On en déduit:

$$(w_{n'}(\omega), g_{n'}(\omega)) \in co\left[\bigcup_{\|x-\bar{u}(\omega)\|<\varepsilon} epif(\omega, x, .)\right]$$

Par passage à la limite, $n' \to +\infty$, on a :

$$\left(\bar{v}(\omega), \liminf_{n'\to+\infty} g_{n'}(\omega)\right) \in \overline{co}\left[\bigcup_{\|x-\bar{u}(\omega)\|<\varepsilon} epif(\omega, x, .)\right]$$

et comme ε est arbitraire, on obtient:

$$\left(\bar{v}(\omega), \liminf_{n'\to+\infty} g_{n'}(\omega)\right) \in \bigcap_{\varepsilon>0} \overline{co}\left[\bigcup_{\|x-\bar{u}(\omega)\|<\varepsilon} epif(\omega, x, .)\right]$$

La proposition1.1 et le fait que f est convexe s.c.i impliquent:

$$\left(\bar{v}(\omega), \liminf_{n'\to+\infty} g_{n'}(\omega)\right) \in epif(\omega, \bar{u}(\omega), .)$$

D'où:

$$f(\omega, \bar{u}(\omega), \bar{v}(\omega)) \leq \liminf_{n'\to+\infty} g_{n'}(\omega)$$

En intégrant les deux membres, on a:

$$\int_{\Omega} f(\omega, \bar{u}(\omega), \bar{v}(\omega)) d\mu \leq \int_{\Omega}^{*} \liminf_{n'\to+\infty} g_{n'}(\omega) d\mu \tag{24}$$

La remarque 2.3 et la propriété $(P.E.I)$ impliquent que la famille $\left\{g_{n'}^{-}(.), \quad n' \in \mathbb{N}\right\}$ est équi-intégrable dans ${L^1}_{\mathbb{R}}(\Omega, \mu)$ ce qui nous permet d'appliquer le lemme2.4 à $(g_{n'})_{n'}$:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega}^{*} \liminf_{n'\to+\infty} g_{n'}(\omega) d\mu &\leq \liminf_{n'\to+\infty} \int_{\Omega} g_{n'}(\omega) d\mu \\ &\leq \liminf_{n'\to+\infty} \sum_{k=n'}^{N} \alpha_k \int_{\Omega} f(\omega, u_k(\omega), v_k) d\mu \end{aligned}$$

et (24) devient:

$$I_f(\bar{u},\bar{v}) \leq \liminf_{n' \to +\infty} \sum_{k=n'}^{N} \alpha_k I_f(u_k, v_k) \tag{25}$$

Or, le deuxième memebre de (25) est égal à c, en effet $\lim\limits_{n \to +\infty} I_f(u_n, v_n) = c$, il existe un entier n_0 tel que:

$$c - \varepsilon \leq I_f(u_k, v_k) \leq c + \varepsilon \qquad \forall k \geq n_0$$

Soit:

$$c - \varepsilon \leq \sum_{k=n'}^{N} \alpha_k I_f(u_k, v_k) \leq c + \varepsilon \qquad \forall k \geq n_0$$

Finalement, on a:

$$I_f(\bar{u},\bar{v}) \leq \liminf_{n' \to +\infty} \sum_{k=n'}^{N} \alpha_k I_f(, u_k(u_k, v_k) = c.$$

Remarque 2.5 *Le théorème2.2 est en défaut sans la propriété $(P.E.I)$, comme le montre l'exemple suivant.*

$$f_0 : [0,1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad \textit{définie par:} \qquad f_0(\omega, x, y) = y^2 - x^2$$

f_0 vérifie les hypothèses i), ii)et iii) du théorème, mais iv) est en défaut, en effet soit:

$$u_k(\omega) = \begin{cases} k\sqrt{2} & w \in [0, \frac{1}{k^2}] \\ 0 & w \in]\frac{1}{k^2}, 1] \end{cases} \qquad v_k(\omega) = \begin{cases} k & w \in [0, \frac{1}{k^2}] \\ 0 & w \in]\frac{1}{k^2}, 1] \end{cases}$$

Les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ convergent dans $L^1_{[0,1]}(\Omega, \mu)$ vers 0, mais $\left\{ f_0^-(u_k, v_k), \quad k \in \mathbb{N}^* \right\}$ n'est pas équi-intégrable puisque:

$$\int\limits_{T_k} |f_0^-(u_k, v_k)| d\lambda = 1 \quad \textit{avec} \quad T_k =]0, \frac{1}{k^2}] \quad \textit{et } \lambda \textit{ est la mesure de Lebesgue}$$

La conclusion du théorème est en défaut puisque:

$$I_{f_0}(0,0) = 0 \quad \textit{et} \quad I_{f_0}(u_k, v_k) = -1 \quad \forall k \in \mathbb{N}^*$$

2.3 Extension du théorème de Ioffé en dimension infinie.

On donne une extension en dimension infinie d'un résultat dû à Ioffé [17], le début de notre démonstration est analogue a celle de Ioffé jusqu'au moment où il utilise le théorème de carathéodory (valable uniquement en dimension finie!). Pour contourner ce point crucial notre idée est d'utiliser la proposition1.4. On rappelle auparavant une caractérisation de l'uniforme intégrabilité par la compacité faible et par une propriété de La Vallée Poussin.

2.3.1. Une famille $\mathcal{F} \subset L^1_X(\Omega, \mu)$ est uniformément intégrable, si $\mathcal{F}$ est bornée et si:

$$\lim_{\mu(E) \to 0} \sup_{f \in \mathcal{F}} \int\limits_E \|f(\omega)\| d\mu = 0$$

2.3.2. Si $\mathcal{F}$ un sous ensemble de $L^1{}_{\mathbb{R}}(\Omega, \mu)$, les assertions suivantes sont équivalentes $([14], 4.2.1, [16], 8.2.1$ et$[19], 2.22))$:

a) $\mathcal{F}$ est uniformement intégrable.

b) $\mathcal{F}$ est relativement faiblement compact.

c) Il existe une fonction $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ croissante convexe s.c.i et fortement coercive telle que:

$$\int_{\Omega} h(f(\omega))d\mu \leq 1 \qquad\qquad \forall f \in \mathcal{F}.$$

On peut à présent énoncer le deuxième résultat principal de ce travail.

Théorème 2.6 *Soient X, Y deux espaces de Banach séparables, Y réflexif, $L \subset L^1_X(\Omega, \mu)$ et $M \subset L^1_Y(\Omega, \mu)$ deux espaces topologiques décomposables (i.e: $u_1.\chi_A + u_2.\chi_{\Omega\setminus A} \in M$ (resp. L) pour tout u_1, u_2 dans M (resp. L) et χ_A la fonction indicatrice de A) et vérifiant les hypothèses (H_1) et (H_2), si en plus on suppose que, pour presque tout $\omega \in \Omega$, on a:*

i) $f(\omega, ., .)$ est $(\|.\|, \sigma)$-s.c.i sur $X \times Y$.

ii) $f(\omega, x, .)$ est convexe pour tout $x \in X$.

Alors:

a) Une condition nécessaire pour que I_f soit s.c.i sur $L \times M$ et à valeurs dans $]-\infty, +\infty]$ est que f vérifie la propriété $(P.E.I)$.

b) S'il existe $(\bar{u}, \bar{v}) \in L \times M$ tel que $I_f(\bar{u}, \bar{v}) < +\infty$, alors cette condition est suffisante.

Preuve. La démonstration de la condition nécessaire est identique en tout point à celle de Ioffé. Nous l'omettons et renvoyons le lecteur à ([17], p:529.530).
Montrons que la condition est suffisante. Supposons qu'il existe $\bar{u} \in L$ et $\bar{v} \in M$ tels que $I_f(\bar{u}, \bar{v}) < +\infty$ et supposons que f vérifie la propriété $(P.E.I)$ sur $L \times M$. Soit $u \in L$, $v \in M$ et $E = \{\omega \in \Omega,\ f(\omega, u(\omega), v(\omega)) \leq 0\}$, d'après la propriété de décomposabilité de L et M on a:

$$\hat{u} = u.\chi_E + \bar{u}.\chi_{E^c} \in L \qquad \text{et} \qquad \hat{v} = v.\chi_E + \bar{v}.\chi_{E^c} \in M$$

et,

$$\begin{aligned} I_f(\hat{u}, \hat{v}) &= \int_E f(\omega, u(\omega), v(\omega))d\mu + \int_{E^c} f(\omega, \bar{u}(\omega), \bar{v}(\omega))d\mu \\ &\leq \int_{E^c} f(\omega, \bar{u}(\omega), \bar{v}(\omega)) \\ &\leq I_f(\bar{u}, \bar{v}) \end{aligned}$$

La propriété $(P.E.I)$ implique que $\int_\Omega f^-(\omega,u(\omega),v(\omega))d\mu > -\infty$ et donc $I_f(L\times M) \in]-\infty,+\infty]$.
Soit $(u_k,v_k)_k$ une suite d'éléments de $L\times M$ qui converge vers (u,v) et telle que, pour tout entier k, on a $\int_\Omega f(\omega,u_k(\omega),v_k(\omega))d\mu \leq a < +\infty$. Il suffit de montrer que $I_f(u,v) \leq a$.
On distinguera deux cas:

1^{er} cas: $f \geq 0$.

Utilisant l'hypothèse (H_2) et la caractérisation 2.3.2 on peut trouver une fonction positive croissante $h_o:\ \mathbb{R}^+ \to\ \mathbb{R}^+$ telle que:

$$\lim_{\tau\to+\infty}\frac{h_0(\tau)}{\tau} = +\infty \qquad \text{et} \qquad \int_\Omega h_0(\|v_k(\omega)\|)d\mu \leq 1 \quad \forall k=1,2,...$$

Soit $h:\ \mathbb{R}^+ \to\ \mathbb{R}^+$ une autre fonction croissante $\left(\text{par exemple } h(\tau)=\sqrt{\tau h_0(\tau)}\right)$ telle que:

$$\lim_{\tau\to+\infty}\frac{h(\tau)}{\tau} = \lim_{\tau\to+\infty}\frac{h_0(\tau)}{h(\tau)} = +\infty \tag{26}$$

Posons:

$$h_1(\xi) = \inf\{h_0(\tau), \quad h(\tau)=\xi\} \qquad \text{et} \qquad \xi_k(\omega) = h(\|v_k(\omega)\|) \tag{27}$$

h_1 est positive croissante et vérifie encore:

$$\lim_{\tau\to+\infty}\frac{h_1(\tau)}{\tau} = +\infty \tag{28}$$

De plus pour tout $k=1,2,...$

$$\begin{aligned}\int_\Omega h_1(\xi_k(\omega))d\mu &= \int_\Omega h_1(h(\|v_k(\omega)\|))d\mu \\ &\leq \int_\Omega h_0(\|v_k(\omega)\|)d\mu \\ &\leq 1\end{aligned} \tag{29}$$

Par conséquent, et cela en vertu de 3.2.2, la suite$\{\xi_k(.),\quad k\in\ \mathbb{N}\}$ est faiblement relativement compacte dans $L^1{}_{\mathbb{R}}(\Omega,\mu)$, et d'après le lemme de Mazur([15], p:416), il existe une suite de combinaison convexes de (v_k,ξ_k) qui converge fortement dans $L^1_Y(\Omega,\mu)\times L^1{}_{\mathbb{R}}(\Omega,\mu)$. Autrement dit, pour tout entier j il existe $N_j\in\ \mathbb{N}$, une suite $(\alpha_{ij})_{1\leq i\leq N_j}\in S(N_j)$, une suite $(k_j)_j$ d'indices vérifiant $k_j\leq k_j+N_j\leq k_{j+1}$ tels que:

$$y_j(\omega) = \sum_{i=1}^{N_j}\alpha_{ij}v_{k_j+i}(\omega) \stackrel{j\to\infty}{\longrightarrow} v\in L^1_Y(\Omega,\mu) \tag{30}$$

$$\eta_j(\omega) = \sum_{i=1}^{N_j}\alpha_{ij}\xi_{k_j+i}(\omega) \stackrel{j\to\infty}{\longrightarrow} \eta\in L^1{}_{\mathbb{R}}(\Omega,\mu) \tag{31}$$

Quitte à extraire une sous suite, on peut supposer que $(y_j, \eta_j)_j$ converge presque partout sur Ω, posons:

$$\lambda_j(\omega) = \sum_{i=1}^{N_j} \alpha_{ij} f(\omega, u_{k_j+i}(\omega), v_{k_j+i}(\omega)) \tag{32}$$

Comme f est positive, on a:

$$\lambda_j(\omega) \geq 0 \quad \mu.p.p \qquad \text{et} \qquad \int_\Omega \lambda_j(\omega) \leq a \quad k = 1, 2, ... \tag{33}$$

Montrons que:

$$f(\omega, u(\omega), v(\omega)) \leq \liminf_{j \to +\infty} \lambda_j(\omega) \tag{34}$$

Ce qui impliquerait en utilisant le lemme de Fatou généralisé2.4, applicable grace à (33), la s.c.i de I_f. En effet l'hypothèse (H_2) implique que $(u_k)_k$ converge en mesure vers u, et par conséquent elle converge presque partout dans Ω. Fixons $\omega \in \Omega$ tel que:

$$\lim_{k \to +\infty} u_k(\omega) = u(\omega), \qquad \lim_{j \to +\infty} y_j(\omega) = v(\omega), \qquad \lim_{j \to +\infty} \eta_j(\omega) = \eta(\omega).$$

D'après (27), (30), (31) et (32), on a:

$$\begin{aligned} (y_j(\omega), \lambda_j(\omega), \eta_j(\omega)) &= \sum_{i=1}^{N_j} \alpha_{ij} \Big(v_{k_j+i}(\omega), f\Big(\omega, u_{k_j+i}(\omega), v_{k_j+i}(\omega)\Big), \xi_{k_j+i}(\omega)\Big) \\ &\in co \left\{ (z, \nu, h(\|z\|)), \quad (z, \nu) \in \bigcup_{i=1}^{N_j} epif(\omega, u_{k_j+i}(\omega), .) \right\} \end{aligned}$$

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \|u_n(\omega) - u(\omega)\| = 0$, pour tout $\varepsilon > 0$ et à partir d'un certain rang j_0, on a:

$$\begin{aligned} \bigcup_{i=1}^{N_j} epif(\omega, u_{k_j+i}(\omega), .) &\subset \bigcup_{q > k_j} epif(\omega, u_q(\omega), .) \\ &\subset \bigcup_{\|x - u(\omega)\| < \varepsilon} epif(\omega, x, .) \end{aligned}$$

D'où:

$$(y_j(\omega), \lambda_j(\omega), \eta_j(\omega)) \in co \left\{ (z, \nu, h(\|z\|)), \quad (z, \nu) \in \bigcup_{\|x - u(\omega)\| < \varepsilon} epif(\omega, x, .) \right\}$$

$\varepsilon > 0$ étant quelconque et par passage à la limite lorsque $j \to +\infty$, on a:

$$\Big(v(\omega), \liminf_{j \to +\infty} \lambda_j(\omega), \eta(\omega) \Big) \in \bigcap_{\varepsilon > 0} \overline{co} \left\{ (z, \nu, h(\|z\|)),\ (z, \nu) \in \bigcup_{\|x - u(\omega)\| < \varepsilon} epif(\omega, x, .) \right\}$$

par conséquent:

$$\Big(v(\omega), \liminf_{j \to +\infty} \lambda_j(\omega) \Big) \in Pr_{Y \times \mathbb{R}} \bigcap_{\varepsilon > 0} \overline{co} \left\{ (z, \nu, h(\|z\|)), (z, \nu) \in \bigcup_{\|x - u(\omega)\| < \varepsilon} epif(\omega, x, .) \right\}$$

Finalement, la proposition 1.4 appliquée à la fonction $f(\omega,.,.)$ donne:

$$(v(\omega), \liminf_{j\to+\infty} \lambda_j(\omega)) \in epif(\omega, u(\omega), .)$$

Où encore:

$$f(\omega, u(\omega), v(\omega)) \leq \liminf_{j\to+\infty} \lambda_j(\omega)$$

Qui est la relation (34) et achève la démonstration du cas f positive.

$2^{\text{ème}}$ cas: f quelconque.

Le cas f quelconque se ramène au cas f bornée inférieurement et par translation au cas $f \geq 0$, en posant $f_N(\omega, x, y) = \max(f(\omega, x, y), -N)$. La démonsration donné dans [17] reste valable en dimension infinie, nous ne la reproduisons pas ici.

Dans la suite, nous considérons le cas particulier $L = L^1_X(\Omega, \mu)$ muni de la topologie de la norme et $M = L^1_Y(\Omega, \mu)$ muni de la topologie faible. La proposition suivante caractérise la propriété $(P.E.I)$ sur $L^1_X(\Omega, \mu) \times L^1_Y(\Omega, \mu)$. Nous démontrons ainsi l'équivalence entre les conditions données respectivement par Ioffé [17] et Olech [22]

Proposition 2.7 *Soit X et Y deux espaces de Banach séparables, considérons les assertions suivantes:*

i) il existe $M \in \mathbb{R}^+$ et $\alpha \in L^1_{\mathbb{R}}(\Omega, \mu)$ tels que:

$$f(\omega, x, y) \geq \alpha(\omega) - M(\|x\| + \|y\|), \qquad \forall\ (\omega, x, y) \in \Omega \times X \times Y.$$

ii) f vérifie la propriété $(P.E.I)$.

alors, on a:

1) i)$\Longrightarrow$ ii)

2) S'il existe $(\bar{u}, \bar{v}) \in L^1_X(\Omega, \mu) \times L^1_Y(\Omega, \mu)$ tel que $\int_\Omega f(\omega, \bar{u}(\omega), \bar{v}(\omega)) d\mu < +\infty$, alors les deux assertions sont équivalentes.

Preuve. Supposons i) et soit $(u_n)_n$ (resp. $(v_n)_n$) une suite convergeante d'éléments de $L^1_X(\Omega, \mu)$(resp. $L^1_Y(\Omega, \mu)$) tels que $I_f(u_k, v_k) \leq a < +\infty$ pour tout entier k. Les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont équi-intégrables et pour $E \in \mathcal{A}$ posons:

$$E_k = \{\omega \in E,\ \ f(\omega, u_k(\omega), v_k(\omega)) \leq 0\}$$

On a:

$$\begin{aligned} \int_E |f^-(\omega, u_k(\omega), v_k(\omega))| d\mu &= -\int_{E_k} f(\omega, u_k(\omega), v_k(\omega)) d\mu \\ &\leq M(\int_E \|u_k(\omega)\| d\mu + \int_E \|v_k(\omega)\| d\mu) + \int_E |\alpha(\omega)| d\mu \end{aligned}$$

On en conclut que f vérifie la propriété $(P.E.I)$ sur $L^1_X(\Omega,\mu) \times L^1_Y(\Omega,\mu)$.
Pour l'implication inverse on s'inspère d'un argument utilisé par Olech [22]. La propriété $(P.E.I)$ implique évidement que l'ensemble $\{f^-(.,u_k(.),v_k(.)),\quad k \in \mathbb{N}\}$ est équi-intégrable lorsque les espaces X et Y sont muni de leurs topologies de la norme.
On pose $Z = X \times Y$ et on considére l'espace $L^1_Z(\Omega,\mu) = L^1_X(\Omega,\mu) \times L^1_Y(\Omega,\mu)$.
Par hypothèse il existe $\bar{z} = (\bar{u},\bar{v}) \in L^1_Z(\Omega,\mu)$ tel que $\int\limits_\Omega f(\omega,\bar{z}(\omega))d\mu \in \mathbb{R}$, il suffit de montrer qu'il existe un entier k_0 tel que la fonction $\alpha_k(\omega) = \inf\limits_{z\in Z}(f(\omega,z) + k\|z\|)$ soit intégrable.
Supposons au contraire que $\int\limits_\Omega \alpha_k(\omega)d\mu = -\infty$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Alors pour tout entier k il existe $A_k \in \mathcal{A}$, $\mu(A_k) \leq \frac{1}{k}$ et une fonction intégrable $\varphi_k(.)$ définie sur A_k telle que:

$$\forall\omega \in A_k, \quad \alpha_k(\omega) + 1 \leq \varphi_k(\omega) \leq 0 \qquad \text{et} \qquad \int\limits_{A_k} \varphi_k(\omega)d\mu \leq -1 \tag{35}$$

En effet, on a:

$$\int\limits_{\{\alpha_k<-1\}} (\alpha_k(\omega)+1)d\mu = \int\limits_\Omega (\alpha_k(\omega)+1)d\mu = -\infty \tag{36}$$

Comme μ est supposée sans atomes et $\mu(\Omega) < \infty$, il existe une partition finie $(A_p)_{1\leq p\leq m}$ de $\{\omega \in \Omega,\ \alpha_k(\omega) < -1\}$ telle que pour tout entier $1 \leq p \leq m$, on a $\mu(A_p) \leq \frac{1}{p}$. De plus (36) implique qu'il existe un entier $k_0 \in \{1,2,...,m\}$ tel que $\int\limits_{A_{k_0}} (\alpha_{k_0}(\omega)+1) = -\infty$
D'autre part, d'après le théorème de convergence monotone, on a:

$$-\infty = \int\limits_{A_{k_0}} (\alpha_{k_0}(\omega)+1)d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{A_{k_0}} (\max(\alpha_{k_0}(\omega)+1,-n))d\mu$$

d'où:

$$\int\limits_{A_{k_0}} (\max(\alpha_{k_0}(\omega)+1,-n))d\mu \leq -1$$

à partir d'un certain rang n_k. Posons alors $\varphi_k(.) = \max(\alpha_k(.)+1,-n_k)$.
Soit à présent la multiapplication Γ_k définie sur A_k par:

$$\Gamma_k(\omega) = \{z \in Z, \quad f(\omega,z) + k\|z\| \leq \varphi_k(\omega)\}$$

Γ_k est à valeurs finie et $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(X)$-mesurable, alors d'après le théorème de sélection mesurable de Aumman [11], il existe $z_k : A_k \to Z$ telle que:

$$f(\omega,z_k(\omega)) + k\|z_k\| \leq \varphi_k(\omega) \qquad \mu \text{ p p sur } A_k \tag{37}$$

En outre, puisque μ est supposée sans atomes, il existe $\bar{A}_k \subset A_k$ tel que $\int\limits_{\bar{A}_k} \|z_k(\omega)\|d\mu \leq \frac{1}{k}$
En posant $\hat{z}_k = z_k.\chi_{\bar{A}_k} + \bar{z}_k.\chi_{A^c_k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a:

$$\|\hat{z}_k - \bar{z}\|_1 \quad = \quad \int\limits_{\bar{A}_k} \|z_k(\omega) - \bar{z}(\omega)\|d\mu$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_{\bar{A}_k} \|z_k(\omega)\|d\mu + \int_{\bar{A}_k} \|\bar{z}(\omega)\|d\mu \\
&\leq \frac{1}{k} + \int_{\bar{A}_k} \|\bar{z}(\omega)\|d\mu
\end{aligned}$$

Comme $\mu(\bar{A}_k) \leq \frac{1}{k}$, la dernière inégalité montre que $\hat{z}_k \overset{L^1_X(\Omega,\mu)}{\longrightarrow} \bar{z}$
D'autre part, se référant à (35)et (37), on a:

$$\begin{aligned}
\int_{\bar{A}_k} f(\omega, z_k(\omega))d\mu &\leq \int_{\bar{A}_k} (\varphi_k(\omega) - k\|z_k(\omega)\|)d\mu \\
&\leq \int_{\bar{A}_k} \varphi_k(\omega)d\mu - \int_{\bar{A}_k} k\|z_k(\omega)\|d\mu \\
&\leq -1 - \int_{\bar{A}_k} k\|z_k(\omega)\|d\mu \\
&\leq -1
\end{aligned}$$

D'où:

$$\begin{aligned}
I_f(\hat{z}_k) &= \int_{\bar{A}_k} f(\omega, z_k(\omega))d\mu + \int_{{\bar{A}_k}^c} f(\omega, \bar{z}(\omega))d\mu \\
&\leq I_f(z_k) + \int_{\Omega} |f(\omega, \bar{z}(\omega))|d\mu \\
&< +\infty
\end{aligned}$$

et:

$$\int_{\bar{A}_k} |f^-(\omega, z_k(\omega))|d\mu = -\int_{\bar{A}_k} f(\omega, z_k(\omega))d\mu \geq 1$$

Ce qui contredit le fait que f vérifie la propriété $(P.E.I)$ sur $L^1_Z(\Omega, \mu)$.

Comme conséquence de la proposition2.7 et du théorème2.6, on obtient une extension en dimension infinie du théorème (1)de Olech [22]. E.J.Balder démontre dans [3] le même résultat par des méthodes differents.

Théorème 2.8 *Soit X et Y deux espaces de Banach séparables, Y réflexif. Supposons qu'il existe $(u_0, v_0) \in L^1_X(\Omega, \mu) \times L^1_Y(\Omega, \mu)$ tel que $\int_{\Omega} f(\omega, u_0(\omega), v_0(\omega))d\mu < \infty$, alors les assertions suivantes sont équivalentes:*

i) Il existe un réel positif M et une fonction intégrable $\alpha(.)$ tels que:

$$f(\omega, x, y) \geq \alpha(\omega) - M(\|x\| + \|y\|), \qquad \forall(\omega, x, y) \in \Omega \times X \times Y.$$

ii) I_f est s.c.i sur $L^1_X(\Omega, \mu) \times L^1_Y(\Omega, \mu)$ et est à valeurs dans $]-\infty, +\infty]$.

References

[1] **H.Attouch**, *Variational convergence for functions and operators.* Research notes in mathematics, London, (1983).

[2] **E.J.Balder**, *A general approch to lower semicontinuity and lower closure in optimal control theory.* SIAM.J.Control and Optimization 22(1984), 570-598.

[3] **E.J.Balder**, *Necessary and sufficient conditions for L_1-strong-weak lower semicontinuity of integral functionals.* Nonlinear Anal. 11 (N12, 1987), 1399-1404.

[4] **G.Bottaro, P.Oppezi**, *Semicontinuità infériore di un funzionale integrale dependante da funzioni a valori in uno spazio di Banach.* Bollettino U.M.I.(5) 17-B(1980),1290-1307.

[5] **A.Bourass**, *Adaptation aux espaces intégraux de type Orlicz du critère de Ioffé de semi-continuité forte-faible d'une fonctionnelle intégrale.* Preprint(1979).

[6] **A.Bourass**, *Comparaison des fonctionnelles intégrales sur les séléctions d'une multiapplication mesurable. Conditions de croissances et inclusion des cônes radiaux.* Séminaire d'analyse convexe, Montpellier-Perpignan, exposé $N10$(1982).

[7] **A.Bourass**, *Conditions de croissances et semi-continuité forte et en mesure d'une fonctionnelle intégrale.* Séminaire d'analyse convexe, Montpellier-Perpignan, exposé $N12$(1982).

[8] **A.Bourass**, *Comparaison de fonctionnelles intégrales. Conditions de croissance caractéristiques et application à la semi-continuité dans les espaces intégraux de type Orlicz.* Thèse d'Etat, Perpignan, (1983).

[9] **A.Bourass, A.Fougèrs**, *Conditions de croissances caractéristique de la s.c.i forte-faible d'une fonctionnelle intégrale.* A.V.A.M.A.C, Perpignan, N 84-02(1984).

[10] **C. Castaing, P.Clauzure**, *Semi-continuité des fonctionnelles intégrales.* Séminaire d'analyse convexe, Montpellier-Perpignan, exposé $N15$(1981).

[11] **C. Castaing, M. Valadier**, *Convex analysis and measurable multifunctions.* Lecture Notes in Math. vol 580, Springer-Verlag Berlin and New York, (1977).

[12] **L.Césari**, *Closure, lower closure, and semicontinuity theorems in optimal control.* SIAM.J.Control, 9(1971), 287-315.

[13] **L.Césari**, *Lower semicontinuity and lower closure theorem without semi normality condition.* Annal.Mat.Pura ed App, 98(1974).

[14] **J. Diestel, J.J. Uhl**, *Vector measures.* Math. surveys 15. American Mathematical Society, (1977).

[15] **N.Dunford, J.T.Schwartz**, *Linear operators*, part I, Interscience Publishing, INC, London (1958).

[16] **I.Ekeland, R.Temem**, *Analyse convexe et problèmes variationnels.* Dunod-Gauthier-Villars, (1974).

[17] **A.D.Ioffé**, *On lower semicontinuity of integral function I,II.* SIAM.J.Control and Optimization15(1977), 521-538 et 991-1000.

[18] **O.Kahlaoui**, *Convergence d'ensembles et éxtrémalité. Semi-continuité inférieure forte-faible et inf- compacité des fonctionnelles intégrales.* Thèse, Rabat(1990).

[19] **P.A.Mayer**, *Probability and Potentials.* Blausdell Publishing Company (1966).

[20] **C.Olech**, *Existance theory in optimal control problems-the underlying ideas*, in International Conference on Differential Equation, H.A.Antosiewicz,ed. Academic Press, New York(1976), 612-629.

[21] **C.Olech**, *Weak lower semicontinuity of integral functionals.* J. Optimization Theory and Application, 19-1(1976), 135-142.

[22] **C.Olech**, *A characterization of L_1-weak lower semicontinuity of integral functionals.* Bull. Acad.Polon.Sci, 25(1977), 135-142.

[23] **A.Truffert**, *Propriété de Fatou-Vitali: Application à l'épi-convergence des fonctionnelles intégrales.* Séminaire d'analyse convexe, Montpellier-Perpignan, exposé $N9$ (1983).

Abdelhamid Bourass
Département de Mathématiques et Informatique
Faculté des Sciences, Université Mohamed V
B.P.1014 Agdal, Rabat, Maroc.
bourass@fsr.ac.ma
Bouchaïb Ferrahi
Département de Mathématiques et Informatique
Faculté des Sciences, Université Mohamed V
B.P.1014 Agdal, Rabat, Maroc.
ferrahi@yahoo.com
Ouafa Kahlaoui
Département de Mathématiques et Informatique

Faculté des Sciences Ben M'sik, Université Hassan II
Bd.Commandant Driss El Harti, BP.7955 Casablanca, Maroc.